TD 34 : Théorie de l'intégration Indications

Calcul d'intégrales (piqûre de rappel)

1 ★★☆ (*Calcul d'intégrales*) Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 t^2(t^3+1)^5 dt$

2) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 7} \frac{dt}{1-4e^{-2t}}$

3) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dt}{t^2-t}$

4) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) dt$

5) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin t + \tan t}$

6) $\displaystyle\int_1^8 \frac{dt}{2\sqrt[3]{t}-1}$

7) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t+1}{t^2-t-6} dt$

8) $\displaystyle\int_{-2}^2 t\,|t|\, dt$

9) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{(t^2+t+1)(t^2-t+1)} dt$

2 ★★☆ Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 t e^{i2\pi t} dt \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{it}+1} dt$$

Propriétés de l'intégrale

3 ★★☆ Pour chacune de ces fonctions, donner l'ensemble de définition, de dérivabilité puis calculer la dérivée :

$$f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t^2+1} dt \qquad g : x \mapsto \int_2^{2x} \frac{1}{\ln t} dt$$

$$h : x \mapsto \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \arctan(t^2)\, dt$$

Le plus dur est de trouver l'ensemble de définition. Pour un réel x donné, l'intégrale $\displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$ a un sens si et seulement $a(x)$ et $b(x)$ ont un sens et si f est continue par morceaux entre $a(x)$ et $b(x)$. Pour ce dernier point, on pourra déterminer les intervalles sur lesquels f est continue par morceaux pour en déduire pour quelles valeurs de x est-ce que $\left[a(x), b(x)\right]$ est inclus dans un de ces intervalles (si $a(x) \leq b(x)$).

4 ★★ Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ 2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} dx$

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sqrt{1+x^n} dx$

5 ★★ Soit $f : \left[0,1\right] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \leq 1$ et $\displaystyle\int_0^1 f = 1$. Montrer que $f \equiv 1$. Poser $g = 1 - f$.

6 ★★ (***Lemme de Riemann-Lebesgue***) Soit une fonction $f : \left[a,b\right] \to \mathbb{R}$.

1) On suppose f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[a,b\right]$. Montrer que

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2) Montrer que le résultat est encore vrai si f est en escalier sur $\left[a,b\right]$.

3) En déduire que le résultat est encore vrai si f est continue par morceaux sur $\left[a,b\right]$.

1) Intégrer par parties.

3 Utiliser la définition de la limite et utiliser le lemme d'approximation d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier.

7 ★★★ Soit $f \in \mathscr{C}^0(\left[a,b\right], \mathbb{R})$. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b |f(t)|dt \iff f \geq 0 \quad \text{ou} \quad f \leq 0$$

Poser f_+ et f_- les fonctions de $\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ définies par :

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \\ |f(x)| & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

et remarquer que $f = f_+ - f_-$ et $|f| = f_+ + f_-$.

8 ★★★ Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ une fonction telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.
Poser $g : x \mapsto f(x) - x$ et montrer que g s'annule sur $[0,1]$. On pourra pour cela raisonner par l'absurde.

Formules de Taylor

9 ★ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

En déduire, pour tout réel x, la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$
Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

10 ★ Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) \right| \leq \frac{|x|^7}{7!}$$

Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

11 ★☆ Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ une fonction convexe et $a \in \mathbb{R}$. Par la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$$

Quel résultat connu retrouve-t-on ainsi ?
Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1.

12 ★★ Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt$$

1) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On pourra intégrer par parties.
2) Montrer que f possède une limite finie en 0 que l'on déterminera. On pourra étudier le comportement quand x tend vers 0 de

$$\int_x^{2x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

13 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) En justifiant sa validité, écrire la formule de Taylor avec reste intégral d'ordre n en 0 pour la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$.
2) En déduire la limite de la suite de terme général $u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Pour appliquer la formule de Taylor avec reste intégral, il n'est pas nécessaire de calculer les dérivées successives de f : les premiers termes de la formule sont communs avec la formule de Taylor-Young, donc on les obtient si on connait le $\mathrm{DL}_n(0)$ de f.

Sommes de Riemann

14 ★★ Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$
2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$
3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$
4) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{2^1} + \cdots + \sqrt[n]{2^n}}{n}$

Pour faire apparaitre les $\dfrac{k}{n}$ dans la somme, on pourra transformer tous les k en $\dfrac{k}{n} \times n$ puis s'occuper exclusivement des n.

15 ★★ En faisant apparaitre une somme de Riemann, déterminer un équivalent pour les suites suivantes :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^3}$$

Faire apparaitre une somme de Riemann, et se souvenir que les sommes de Riemann tendent vers une constante, il n'est donc pas difficile d'en obtenir un équivalent (si la constante est non nulle).

Continuité uniforme

16 ★★ Est-ce que l'application $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,1]$? Et sur $[1,+\infty[$? En déduire si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
Même questions pour $g : x \mapsto \ln x$ sur $]0,1]$, puis $[1,+\infty[$ et enfin $\mathbb{R}_+^*$.

17 ★★ Soit $f : \left]0,1\right] \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue. Montrer que f est bornée. Le résultat est-il encore vrai si f est seulement supposée continue ?
Pour la première question, utiliser la définition de l'uniforme continuité de f pour, par exemple, $\varepsilon = 1$, et en déduire l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que la suite de l'assertion soit valide. Exploiter cette définition avec des valeurs successives de x et y dans $\left]0,1\right]$ bien choisies, en commençant avec $y = 1$ et $x = 1 - \delta$.

Un contre-exemple de la seconde question est facile à trouver.